Bernhard Riemann (1826-1866)

LA GEOMETRIA DIFERENCIAL, DE GAUSS A RIEMANN

per

Joan Girbau i Badó

La Geometria Diferencial neix el segle XVIII com a conseqüència de dos descobriments extraordinàriament importants que s'havien produït el segle precedent en el camp de les Matemàtiques: la Geometria Analítica, iniciada per Fermat i Descartes, i el Càlcul Infinitesimal, obra de Newton i Leibniz.

Els treballs veritablement importants dins la Geometria Diferencial no arriben, però, fins al segle XIX amb Gauss i Riemann, els quals, per llur influència posterior, poden ésser considerats com els pares de la Geometria Diferencial moderna. Abans de centrar-nos en l'obra d'aquests dos grans matemàtics, parlarem una mica del que fou fet en aquest camp amb anterioritat a Gauss.

Durant el segle XVIII la Geometria Diferencial es desenvolupà en dues direccions: la teoria de corbes i la teoria de superfícies.

La teoria de corbes abans de Gauss

És el mateix Newton, en la seva "Geometria Analítica", editada per primera vegada el 1736, després de la seva mort, el primer a definir la noció de cercle osculador en un punt d'una corba plana, i amb això, les nocions de centre de curvatura, radi de curvatura i curvatura, calculant les seves expressions amb l'ajut de la noció de derivada, recentment inventada. Clairaut és el primer que s'interessa per les corbes a l'espai, en el seu treball "Recherche sur les courbes à double courbure" (1731). No obstant això, fins al 1775 en què Monge publica el seu article "Sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions dans les courbes à double courbure", la noció de curvatura d'una corba a l'espai no quedarà perfectament establerta. Vegem a continuació com Monge introdueix aquest concepte. Comença observant que les normals en un punt no singular d'una corba a l'espai són en un pla. En aquest pla es troba una recta que ell anomena "eix", que és el límit de la intersecció d'aquest pla amb el pla corresponent a un altre punt de la corba, infinitament pròxim. És a dir, cada punt P de la corba té el seu "eix". Si hom traça una perpendicular des de P a l'eix corresponent a P i anomenem Q el peu d'aquesta perpendicular, Q serà el centre de curvatura, PQ el radi de curvatura, i la inversa de la longitud PQ, la curvatura.

Fins al 1806 en què Lancret publica "Mémoire sur les courbes à double courbure", la noció de torsió d'una corba a l'espai no quedarà correctament establerta. Lancret defineix per primera vegada el pla osculador. La normal a la corba continguda en aquest pla és la normal principal, i anomena binormal la normal al pla osculador. Si bé, doncs, en aquest treball de Lancret els conceptes fonamentals de la teoria de corbes a l'espai ja són presents, la seva presentació encara és molt allunyada de la presentació actual. És Cauchy en el seu llibre "Leçons sur l'application du calcul infinitesimal à la Géometrie", aparegut el 1806, qui adopta el punt de vista modern. Cauchy parametritza la corba per l'arc. Observa que la direcció de la normal principal és donada en cada punt pels tres components $\frac{d^2 x}{ds^2}$, $\frac{d^2 y}{ds^2}$, $\frac{d^2 z}{ds^2}$.

Anomena Cos α, Cos β, Cos γ els cosinus directors de la tangent, Cos λ, Cos μ, Cos ν els de la normal principal, i Cos L, Cos M, Cos N els de la binormal.

Demostra que

$$\frac{d \operatorname{Cos} \alpha}{ds} = \frac{\operatorname{Cos} \lambda}{\rho}, \quad \frac{d \operatorname{Cos} \beta}{ds} = \frac{\operatorname{Cos} \mu}{\rho}, \quad \frac{d \operatorname{Cos} \gamma}{ds} = \frac{\operatorname{Cos} \nu}{\rho}$$

on ρ és el radi de curvatura. Estableix també que

$$\frac{d \operatorname{Cos} L}{ds} = \frac{\operatorname{Cos} \lambda}{R}, \quad \frac{d \operatorname{Cos} M}{ds} = \frac{\operatorname{Cos} \mu}{R}, \quad \frac{d \operatorname{Cos} N}{ds} = \frac{\operatorname{Cos} \nu}{R}.$$

El coeficient $\frac{1}{R}$ és la torsió. Aquestes relacions constitueixen les dues primeres fórmules de Frenet. La tercera fou obtinguda molt més tard, per Frenet, el 1852, en el seu treball "Sur les courbes à double courbure" publicat en el Liouville journal de Mathématiques, vol. XVII.

La teoria de superfícies abans de Gauss

Ja el 1697 Johanes Bernouilli proposa el següent problema: "Deux points étant donnés sur une superficie connexe, on demande une manière d'y décrire géométriquement d'un de ces points à l'autre, la ligne la plus courte" (Johanes Bernouilli. Opera Omnia. Lausane 1767, vol. 1, pàgina 204). El problema de trobar les geodèsiques d'una superfície estava doncs, des de llavors, correctament formulat. El 1728 apareixen per separat dos treballs, un del mateix Johanes Bernouilli i l'altre d'Euler, que intenten solucionar aquest problema. El treball d'Euler (De linea brevissima in superficie quancunque. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Vol. 2 St. Petersburg 1728) és molt més profund que no el de Bernouilli i conté les famoses equacions del càlcul de variacions que avui es coneixen per equacions d'Euler.

Cal mencionar també dos altres treballs d'Euler sobre la teoria de superfícies: "Recherche sur la courbure des surfaces" (Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Berlín 1760) i "De Solidis quorum superficiem in planum explicare licet" (Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Vol. XVI, 1772). En el primer, hom introdueix, de manera incipient, les direccions principals i curvatures principals en un punt d'una superfície. En el segon, hom tracta el problema de quan una superfície pot ésser desenvolupada isomètricament sobre un pla i hom troba condicions necessàries perquè això sigui possible.

Un treball veritablement important dins la teoria de superfícies és el publicat per Meusnier el 1785, titulat "Mémoire sur la courbure des surfaces" (Mémoires de Mathématiques et de Physique. Vol. X. París 1785). Meusnier considera una superfície S i el pla tangent a S en un punt p. Mitjançant una elecció adequada de les coordenades, considera que el punt p és l'origen i que el pla tangent és el pla de les coordenades u, v.

Anomenem t la tercera coordenada. t serà funció de u i v sobre la superfície. Desenvolupa t en sèrie de potències a l'origen:

$$t = \frac{1}{2}\,(cu^2 + 2\,euv + fv^2) + \ldots$$

A l'origen hom té

$$d^2 t = cdu^2 + 2\,e\,du\,dv + f\,dv^2 .$$

Si hom suposa que $fc - e^2 \neq 0$, mitjançant una rotació dels eixos pot aconseguir-se que $d^2 t$ prengui la forma

$$d^2 t = \frac{du'^2}{r} + \frac{dv'^2}{\rho} .$$

Les direccions dels eixos de coordenades u′, v′, les anomena direccions principals i els nombres $\frac{1}{r}$ i $\frac{1}{\rho}$, curvatures principals. Meusnier calcula r i ρ en funció de c, e, f i troba les expressions següents:

$$r = \frac{2}{c + f + \sqrt{(c-f)^2 + 4\,e^2}} \;;\quad \rho = \frac{2}{c + f - \sqrt{(c-f)^2 + 4\,e^2}} .$$

En el pla $v' = 0$ pren el cercle de radi r tangent a la línia $t = 0$. Aquest cercle descriu, per rotació entorn de la línia $t = \rho$, un tor. El tor així format té les mateixes direccions i curvatures principals a l'origen que la superfície inicial. Tothom pot reconèixer sota aquest enunciat el que avui coneixem per teorema de Meusnier. Fixa llavors la seva atenció en dos problemes particularment interessants:

1) Què pot dir-se d'una superfície en la qual les curvatures principals en tots els punts són iguals?
2) Què pot dir-se d'una superfície en la qual les curvatures principals en tots els punts són iguals, però de sentit contrari?

Meusnier troba les següents respostes a les preguntes anteriors:

1) Les úniques superfícies que són solució del primer problema són les esferes i els plans.
2) Entre les superfícies limitades per una corba no plana, la que té menor àrea és solució del segon problema.

Meusnier deixa de banda, però, l'existència de superfícies d'àrea mínima. Ja abans, Lagrange s'havia interessat per les superfícies d'àrea mínima i havia trobat que una superfície $z = z(x, y)$ té àrea mínima si compleix l'equació

$$(1 + q^2)r - pqs + (1 + p^2)t = 0,$$

on p, q, r, s, t designen les derivades de primer i segon ordre de $z(x, y)$. El treball de Lagrange al qual ens referim pot trobar-se a les pàgines 335-362 del tom 1 de les obres de Lagrange publicades per Gauthier-Villars, París 1867. Lagrange, però, no sap integrar l'equació diferencial anterior. El primer tractament seriós d'aquesta equació és de Legendre i data del 1787: "Mémoire sur l'integration de quelques equations aux derivées partielles" (Histoire de l'Académie Royale de Sciences, 1787).

La teoria de desenvolupables, que com hem vist fou iniciada per Euler, fou continuada per Monge el 1780 en un treball titulat "Mémoire sur les propiétés de plusieurs genres de surfaces courbes" (Mémoires de Mathématiques et Physique. Vol IX, 1780). Per Monge una superfície desenvolupable és aquella que es pot desplegar sobre un pla. Fixa la seva atenció en l'operació de desplegament i diu que en cada moment el desplegament de la superfície sobre el pla significa una petita rotació, entorn d'un eix. L'eix de rotació ha d'estar immers a la superfície i els eixos successius han d'ésser coplanaris. D'això dedueix que els eixos han de passar per un punt o bé ésser tangents a una corba. En virtut d'aquest raonament, per a estudiar les desenvolupables, estudia la superfície engendrada per les tangents a una corba.

El concepte d'envolvent d'una família de superfícies depenent d'un paràmetre és estudiat per Monge en un llibre titulat "Application de l'Algèbre à la Géométrie" (París 1807). Monge aplica llavors la teoria d'envolvents a les desenvolupables, considerant una desenvolupable com envolvent d'una família de plans. Un brillant deixeble de Monge fou Dupin, que continuà l'obra de Meusnier. Dupin considera (en el seu llibre "Developpements de Géometrie") una superfície $z = z(x, y)$ donada pel seu desenvolupament en sèrie en un punt (x_o, y_o, z_o):

$$z - z_o = p(x - x_o) + q(y - y_o) + \frac{1}{2}\left(r(x - x_o)^2 + 2s(x - x_o)(y - y_o) + t(y - y_o)^2 \right) + \dots$$

Tallant aquesta superfície per un pla paral·lel al pla tangent en el punt (x_o, y_o, z_o), obté com a primera aproximació d'aquesta intersecció la cònica

$$\begin{cases} c = r(x - x_o)^2 + 2s(x - x_o)(y - y_o) + t(y - y_o)^2 \\ z - z_o = p(x - x_o) + q(y - y_o) + c \end{cases}$$

Anomena indicatriu la cònica situada en el pla (x, y) d'equació

$$c = r(x - x_o)^2 + 2s(x - x_o)(y - y_o) + t(y - y_o)^2 .$$

Tallant aquesta cònica per una recta

$$y - y_o = l(x - x_o)$$

troba el semidiàmetre de l'indicatriu en cada direcció i observa que en cada punt de la superfície el radi de curvatura d'una secció normal en una determinada direcció és proporcional al semidiàmetre de la indicatriu en aquella direcció.

Gauss

Un sol treball de Gauss, de relativament poques pàgines, serví per a obrir un camí tan fecund, que inspirà la major part de la Geometria Diferencial del segle XIX i una part important de la del nostre segle. El treball de Gauss a què ens referim porta per títol "Disquisitiones generales circa superficies curvas" i aparegué el 1827. Una edició recent d'aquest treball aparegué el 1979, al número 62 d'Astérisque.

Gauss comença considerant que les coordenades (x, y, z) d'un punt d'una superfície poden expressar-se en funció de dos paràmetres independents que ell anomena p, q, i que nosaltres anomenarem u, v per no confondre'ls amb les primeres derivades de z. A part aquest petit canvi, seguirem en tot moment les notacions de Gauss que han tingut la virtut de mantenir-se a través dels anys. Diferenciant les expressions de x, y, z en funció de u, v, obté

$$dx = a du + a' dv, \quad dy = b du + b' dv, \quad dz = c du + c' dv \quad ,$$

Anomena

$$A = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Designa per $E = a^2 + b^2 + c^2$, $F = aa' + bb' + cc'$, $G = a'^2 + b'^2 + c'^2$. Calcula el diferencial de longitud sobre la superfície i obté

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$$

i obté que $\Delta = \sqrt{EG - F^2}$.

Calcula després el cosinus de l'angle entre dues direccions qualssevol del pla tangent i obté, com a cas particular, que el cosinus de l'angle entre les línies donades per $u = 0$ i $v = 0$ és $F/\sqrt{EG}$. Per tant, aquestes direccions són perpendiculars si $F = 0$.

Després es proposa definir la curvatura d'una superfície, i heus aquí la seva manera de raonar:

En una corba plana, si posem en correspondència cada punt amb el punt de la circumferència unitat determinat per la direcció de la normal orientada, la curvatura de la corba pot ésser interpretada com el límit de les raons dels corresponents arcs infinitesimals de la circumferència i la corba. Això suggereix a Gauss la idea de fer el mateix per a les superfícies. A cada punt (x, y, z) de la superfície, Gauss assigna el punt (X, Y, Z) de l'esfera unitat donat per la direcció de la normal orientada a la superfície en aquell punt. El límit de la raó de les corresponents àrees infinitesimals de l'esfera i de la superfície és el que ell defineix com curvatura. Designa per K aquesta curvatura i considera després la integral $\int K d\sigma$, on $d\sigma$ és l'element d'àrea. Anomena curvatura integral d'una regió B de la superfície, la dita integral estesa sobre B. Obté per càlcul l'expressió

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} \quad ,$$

on

$$D = \frac{1}{\Delta} \det \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^2}, \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v} \right),$$

$$D' = \frac{1}{\Delta} \det \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}, \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v} \right),$$

$$D'' = \frac{1}{\Delta} \det \left(\frac{\partial^2 r}{\partial v^2}, \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v} \right),$$

on $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$
(la notació vectorial és nostra).

Gauss observa llavors que la curvatura K no és sinó el producte de les curvatures principals que havien estat introduïdes per Euler i Meusnier. Mitjançant càlcul, observa que K compleix la següent equació:

$$4(EG - F^2)K = E\left(\frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 \right)$$

$$+ F\left(\frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u} + 4 \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u} \right)$$

$$+ G\left(\frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2 \right)$$

$$- 2(EG - F^2)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right).$$

Aquesta equació tan llarga amaga un dels teoremes més importants de la Geometria Diferencial, teorema que avui es coneix per "teorema egregi de Gauss". Gauss s'adona de la seva importància com es pot comprovar pels paràgrafs que segueixen i que transcrivim literalment:

"Si observem que es té sempre $dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edu^2 + 2F\,du\,dv + Gdv^2$, es veu immediatament que $\sqrt{Edu^2 + 2F\,du\,dv + Gdv^2}$ és l'expressió general d'un element lineal sobre una superfície corba. Per tant l'anàlisi feta a l'apartat precedent (Gauss es refereix aquí a l'equació anterior) ens ensenya que per a trobar la mesura de la curvatura no calen fórmules finites que donin les coordenades x, y, z en funció de les indeterminades u, v, sinó que és suficient conèixer l'expressió general de la longitud de cada element lineal".

... "Les consideracions que acabem d'exposar estan lligades a una manera particular de concebre les superfícies que ens sembla digna, al més alt grau, de la consideració dels geòmetres. En efecte, si es considera una superfície, no com a límit d'un sòlid, sinó millor com un sòlid flexible i inextensible, una part de les propietats de la superfície dependran de la forma particular que pugui adoptar per una determinada flexió, però altres seran absolutes i invariants, qualsevol que sigui aquesta forma. És precisament en l'estudi d'aquesta última classe de propietats que s'obre a la Geometria un camp nou i immens"... "Hom pot concebre des d'aquest punt de vista la teoria de línies geodèsiques i altres temes que tractarem més endavant".

Més endavant Gauss s'ocupa de les geodèsiques i obté, per un raonament geomètric molt simple, el següent important teorema:

"Si sobre una superfície hom traça, des d'un punt, una infinitat de geodèsiques de la mateixa longitud, la línia que uneix els extrems d'aquestes geodèsiques les talla totes en angle recte".

Més endavant considera un triangle format per línies geodèsiques i calcula la integral $\int K d\sigma$, estesa a l'interior d'un tal triangle. Per a això utilitza per primera vegada coordenades polars geodèsiques i obté que la integral anterior és igual a la suma dels angles del triangle, menys π. D'aquí dedueix (transcrivim literalment): "La suma dels angles d'un triangle format per línies geodèsiques és superior a 180° si la superfície és còncavo-còncava i inferior a 180° si la superfície és còncavo-convexa".

Diu llavors que aquest resultat pot ésser generalitzat a un polígon de n costats, descomponent-lo en triangles, i obté per a un tal polígon l'expressió següent:

$$\int K d\sigma = \text{suma d'angles del polígon} -(n - 2)\pi$$

Vint anys després, aquesta fórmula fou generalitzada per Bonnet i donà origen a la fórmula que avui porta el nom de Gauss-Bonnet. Bonnet en el seu treball "Mémoire sur la Théorie générale des surfaces" (Journal École Polytechnique, 19 (1848), pàg. 131) considera un polígon qualsevol sobre una superfície (Gauss només considera un polígon geodèsic) i obté que la integral $\int K d\sigma$ estesa sobre el polígon val la suma d'angles, menys $(n - 2)\pi$, menys la integral de la curvatura geodèsica del contorn. Serà Darboux molt més tard qui donarà la primera demostració de la fórmula de Gauss-Bonet emprant la fórmula de Green (Darboux: Leçons sur la théorie générale des surfaces. París 1887. Pàgina 122).

El treball de Gauss, que obria una infinitat de camins nous, tingué la seva continuació lògica en l'obra de Riemann.

Riemann

El principal treball de Riemann sobre Geometria Diferencial és la seva memòria llegida el 10 de Juny de 1854 amb ocasió de les proves d'admissió com a Professor de la Universitat de Göttinge. El seu títol: "Uber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" (hom pot trobar la següent versió francesa: A. Blanchard. Oeuvres de Riemann. París 1968). En aquest treball els càlculs no hi són més que indicats sumàriament. Comença introduint-hi, de manera més filosòfica que matemàtica, el concepte de varietat de dimensió n, i es preocupa de donar exemples en els quals aparegui la necessitat de considerar varietats de dimensió més gran que 3. Posa l'exemple d'una línia que és transportada sobre una altra línia donada, d'una determinada manera. Diu: "El conjunt de modes de determinació així obtinguts formarà una varietat de dues dimensions. Semblantment hom obtindrà una varietat de tres dimensions si es concep una varietat de dues dimensions, transportada d'una determinada manera sobre una altra de completament diferent, i és fàcil de veure com amb aquest procediment hom pot continuar la construcció". Després es preocupa del concepte de longitud d'un element d'arc en una tal varietat i diu: "El problema consisteix a establir una expressió matemàtica de la longitud d'una línia... em limitaré a les línies en les quals les relacions entre els increments dx de les variables x variïn de manera contínua. Hom pot concebre les línies descompostes en elements en els quals les relacions de les quantitats dx puguin ésser considerades com a constants, i el problema consisteix llavors a establir, per a cada punt, una expressió general de l'element lineal ds amb origen en aquell punt". Llavors ve a dir que sols s'ocuparà del cas en què ds pugui ésser expressat com arrel quadrada d'una forma quadràtica definida positiva. Considera el cas particular en què

$$ds = \sqrt{\Sigma (dx^i)^2}$$

i diu que una tal expressió pot ésser transformada en una altra substituint les n variables x^i per funcions d'unes altres variables independents i el problema que es planteja llavors és el de saber reconèixer en aquest cas que l'element lineal ds és l'element euclidià, convenientment disfressat. Avui sabem que una condició necessària i suficient perquè una mètrica sigui plana és que el seu tensor de curvatura sigui nul. Però el tensor de curvatura és un tensor de quart ordre bastant complicat. Com ho fa Riemann per a introduir la curvatura? Primerament defineix les coordenades normals geodèsiques en un entorn d'un punt x_o, de manera intuïtiva.

Llavors compara l'expressió de l'element de longitud ds^2 en un punt qualsevol i en el punt x_0. En llenguatge actual, si g_{ij} és el tensor mètric, hom tindrà, per la fórmula de Taylor:

$$g_{ij}(x) = g_{ij}(x_o) + \left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \, \partial x^l}\right) x_0^l \, (x^k - x_0^k)(x^l - x_0^l) + \dots ,$$

perquè en coordenades geodèsiques es compleix $\left(\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)_{x_0} = 0.$

Però en aquestes coordenades els termes $\left(\dfrac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \; \partial x^l}\right)_{x_0}$ determinen completament el tensor de curvatura i recíprocament. A més, el tensor de curvatura queda determinat si es coneixen les curvatures seccionals en totes les direccions planes que passen per x_0.

Això és més o menys el que Riemann fa en el treball a què ens referim. Diu que en coordenades normals geodèsiques hom té:

$$ds^2 = \Sigma(dx^i)^2 + \text{un terme d'ordre } 4 + \ldots \quad ,$$

i diu que aquest terme d'ordre 4 queda determinat per les curvatures de Gauss de les superfícies que passen per x_0. Diu després que aquest terme d'ordre 4 mesura en certa manera la "planitud" de l'espai, car si l'espai és pla aquest terme s'anul·la.

Amb anterioritat a Riemann, Lobačevskij, per a provar que el postulat d'Euclides no es deduïa necessàriament dels altres axiomes d'Euclides, havia construït una Geometria eliminant aquest postulat i mantenint els altres axiomes. Aquesta Geometria de Lobatschewsky passà a ésser una més de les infinites Geometries de Riemann possibles, precisament la de curvatura seccional constant negativa.

Les Geometries de Riemann causaren un gran impacte, perquè s'apartaven d'allò que tradicionalment s'havia entès per Geometria. Podríem citar aquí un paràgraf de Poincaré, encara que sigui molt posterior a Riemann, que reflecteix molt bé la preocupació de molts matemàtics per aquestes geometries. Diu Poincaré: "Les geometries de Riemann, tan interessants en molts camps, mai no seran, però, altra cosa que ens purament analítics, i no conduiran a demostracions anàlogues a les d'Euclides" (Poincaré: La Ciencia y la hipótesis. Colección Austral, Espasa-Calpe, pàg. 55).

La diferència entre les infinites geometries de Riemann i les tradicionals és que en la majoria d'aquelles el moviment d'un sòlid rígid no és possible.

Com hem dit abans, a la memòria de Riemann quasi no hi ha càlculs, i els conceptes hi són latents. La primera exposició clara de les idees de Riemann és continguda en un treball de Christoffel titulat "Uber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke Zweiten Grades" (Journal für die reine und angew. Math. (Crelle), 70 (1869), 46-70). El problema que es planteja Christoffel en aquest treball és el de determinar quan dues formes diferencials quadràtiques $\Sigma g_{ij} dx^i dxj$, $\Sigma g'_{ij} dx'^i dx'^j$ poden convertir-se una en l'altra mitjançant un canvi de coordenades. Es tracta de veure en quins casos és possible de trobar funcions independents $x^i = x^i(x'^1 \ldots x'^n)$ que compleixin

$$(1) \qquad g'_{\mu\nu} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^j}{\partial x'^\nu}$$

Introdueix llavors els símbols que porten el seu nom

$$[ij, k] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ i\,j \end{matrix} \right\} = g^{lk}\,[ij, k]$$

i dedueix per derivació de (1) les fórmules de canvi de coordenades dels seus símbols:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\,\nu \end{matrix} \right\}' \frac{\partial x^l}{\partial x'^\lambda} = \left\{ \begin{matrix} l \\ i\,j \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^i}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^j}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^\mu\, \partial x'^\nu} \,.$$

Interpreta (2) com l'equació diferencial que cal resoldre per a trobar les funcions $x^i = x^i(x'^1 \,..\, x'^n)$ que busca. Es proposa llavors trobar les condicions d'integrabilitat de (2). Deriva parcialment (2) respecte a x'^σ i deriva després respecte a x'^ν la següent equació anàloga a (2):

$$(2') \qquad \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\,\sigma \end{matrix} \right\}' \frac{\partial x^l}{\partial x'^\sigma} = \left\{ \begin{matrix} l \\ i\,j \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^i}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^j}{\partial x'^\sigma} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^\mu\, \partial x'^\sigma} \,.$$

Eliminant el terme $\dfrac{\partial^3 x^l}{\partial x'^\mu\, \partial x'^\nu\, \partial x'^\sigma}$

de les equacions que així obté, observa que la condició d'integrabilitat de (2) pot ésser escrita:

$$(3) \qquad R'^\lambda_{\mu\sigma\nu} \frac{\partial x^l}{\partial x'^\lambda} = R^l_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^j}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^k}{\partial x'^\nu}$$

on R indica el tensor de curvatura, que per primera vegada és definit explícitament a partir dels símbols $\left\{ \begin{matrix} l \\ i\,j \end{matrix} \right\}$. Si l'equació (3) es compleix idènticament, (2) és integrable i les dues mètriques poden transformar-se l'una en l'altra. D'aquí es desprèn que si el tensor de curvatura d'una mètrica s'anul·la idènticament, la mètrica és una mètrica euclidiana, disfressada. Això és el cas particular que Riemann havia considerat.

Si (3) no es compleix idènticament, pren (3) com a nova equació per a integrar i troba com a condició d'integrabilitat de (3) una equació en què intervenen les derivades covariants del tensor de curvatura. Si aquesta condició d'integrabilitat es compleix idènticament, té el problema resolt. Si no, pren la nova condició d'integrabilitat com a nova equació a integrar. Troba una altra condició d'integrabilitat per a aquesta nova equació en què figuren les derivades covariants segones de la curvatura, i d'aquesta manera continua el procés.

Acabem dient que les idees de Gauss, continuades per Riemann i Christoffel, foren decisives en l'elaboració de la Relativitat General, al principi del nostre segle.

BIBLIOGRAFIA

1. J. L. Coolidge: "A History of Geometrical Methods". Dover Publ. Nova York. 1963.
2. P. Dombrowski: "Differential geometry. 150 years after Carl Friechich Gauss". *Astérisque,* **62** (1979).
3. J. Girbau: "Memoria sobre el concepto, método y fuentes de la Geometría Diferencial". (1973).
4. M. Spivak: "A comprehensive introduction to Differential Geometry", Vol. 1. Publish or Perish Inc. Boston. 1975.